**Séquence 12**

**Applications du produit scalaire**

1. Application du produit scalaire
2. Calcul de $\left‖ \vec{u}+\vec{v} \right‖$2

**Théorème 5 :** $\left‖ \vec{u}+\vec{v} \right‖$2= $\left‖ \vec{u}\right‖$2 + $2⋅\vec{u}⋅\vec{v}$ + $\left‖ \vec{v} \right‖$2 .

**Démonstration :**

Capacité 8 p. 227

1. Formule d’Al-Kachi :

On considère un triangle ABC et on pose $BC=a$ , $AC=b$ , $AB=c$.

**Alors** $a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc$ **cos** $\hat{A}$ **.**

**Démonstration :** D’après la relation de Chasles, on peut écrire $\vec{BC}=\vec{BA}+\vec{AC}$ , donc $\left‖\vec{BC}\right‖$2 = $\left‖\vec{BA}+\vec{AC}\right‖$2

On sait que $\left‖\vec{BA}+\vec{AC}\right‖$2 = $\left‖\vec{BA}\right‖$2 + $2\vec{BA}⋅\vec{AC}$ + $\left‖\vec{AC} \right‖$2

Or $\left‖\vec{BA}\right‖$2 = $\vec{BA}⋅\vec{BA}=$ $c^{2}$ et $\left‖\vec{AC} \right‖$2 = $\vec{AC}⋅\vec{AC}$ = $b^{2}$

D’autre part, $\vec{BA}⋅\vec{AC}$ = $\left(-\vec{AB}\right)⋅\vec{AC}$ = $-\vec{AB}⋅\vec{AC}$ = -AB.AC.cos $\hat{BAC}$ , d’où le résultat.

Remarque : Si le triangle ABC est rectangle alors cos $\hat{A}$ = 0 et la formule d’Al Kashi nous permet de retrouver le **théorème de Pythagore.**

Capacité 7 p. 227

1. Transformation de l’expression $\vec{MA}⋅\vec{MB}$

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l’ensemble des points M tels que $\vec{MA}⋅\vec{MB}$ **= 0**

**Démonstration :**

Soit Ω le centre du cercle de diamètre [AB]. Pour tout point M du plan $\vec{MA}⋅\vec{MB}$ = $\left(\vec{MΩ}+\vec{ΩA}\right).(\vec{MΩ}+\vec{ΩB)}$=$\left(\vec{MΩ}+\vec{ΩA}\right).(\vec{MΩ}-\vec{ΩA)}$= $\vec{MΩ}$ 2 - $\vec{ΩA}$ 2 = MΩ2 – ΩA2

Comme Ω est le milieu de [AB], $\vec{ΩB}$ = - $\vec{ΩA}$

On obtient donc $\vec{MA}⋅\vec{MB}$ = 0 si et seulement si ΩM = ΩA.

Ainsi $\vec{MA}⋅\vec{MB}$ = 0 si et seulement si M appartient au cercle e centre Ω et de rayon ΩA, c’est-à-dire au cercle de diamètre [AB]

Propriété : Un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

**Démonstration :**

Capacité 9 p.227

1. Application à la physique :

Travail sur activité 2 p 244.