Séquence 4

Dérivation – Partie 2

1. Fonctions usuelles et nombre dérivé
2. Fonction dérivée d’une fonction donnée

Définition 4 : Si $f$ est une fonction dérivable en tout point $a$ d’un intervalle I, on dit que $f$ est dérivable sur I. La fonction qui à chaque réel $x$ de I associe le nombre dérivé $f'\left(x\right)$ de $f$ en $x$ est appelée **fonction dérivée de** $f$ en $x$.

Exemple : Déterminer la fonction dérivée $g'$ de la fonction $g\left(x\right)=x$

1. Nombre dérivé des fonctions usuelles :

Activité 3 : découverte de la dérivée de la fonction $\frac{1}{x}$ et de sa démonstration.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Fonction | $$f\left(x\right)= $$ | Dérivable sur… | $$f'(x)=$$ |
| constante | $$p $$ | $$R $$ | $$0 $$ |
| identité | $$x $$ | $$R $$ | $$1 $$ |
| carré | $$x^{2} $$ | $$R $$ | $$2x $$ |
| Racine carré | $$\sqrt{\left(x\right)} $$ | $$[0;\infty [$$ | $$\frac{1}{2\sqrt{\left(x\right)}} $$ |
| cube | $$x^{3} $$ | $$R $$ | $$3x^{2} $$ |
| inverse | $$\frac{1}{x} $$ |  R/{0} | $$-\frac{1}{x^{2}} $$ |

Démonstration :

Capacité 4 et 5 p 111

Exercices d’applications : 39, 40, 43, 45 p121

1. Fonctions dérivés et opérations :

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit $a$ un réel de I et $h$ un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.

1. Dérivée de la somme de fonctions :

La somme $u+v$ est dérivable est $\left(u+v\right)'$$=u'+v'$**.**

Exemple : Donner la dérivée de la fonction $f\left(x\right)=x^{2}+x+\sqrt{\left(x\right)}$

1. Dérivée du produit de fonctions :

Le produit $uv$ est dérivable et $\left(u×v\right)'=u'×v+u×v'$

Démonstration :

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f\left(x\right)=x×\sqrt{\left(x\right)}$

1. Dérivée du produit d’une fonction par une constante :

Le produit $ku,$ avec $k$ constante réelle, est dérivable et $\left(ku\right)'=ku'$

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f\left(x\right)=2x^{3}$

Capacité 6 p. 113

Exercices d’applications : 49, 50, 51 p121

1. Dérivée du carré d’une fonction :

Le carré de $u$ , noté $u^{2}$ , est dérivable sur I et $\left(u^{2}\right)'=2×u×u'$

Exemple : déterminer la dérivée de la fonction $f\left(x\right)=\left(x-3\right)^{2}$

1. Dérivée du quotient d’une fonction :

Si $v\left(x\right)\ne 0$ sur I, alors l’inverse de $v$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)^{'}=-\frac{v'}{v^{2}}$$

Si $v\left(x\right)\ne 0$ pour tout réel x de I, alors le quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'}=\frac{u^{'}v-uv'}{v^{2}}$$

Exemple : Calculer la dérivée de $f\left(x\right)=\frac{3}{x^{2}+5}$ et $g\left(x\right)=\frac{2x^{2}-13}{1+x}$

**Démonstration (pas au programme) :**

Capacité 8 p. 109

Exercices d’application : 69,71,73 p 122.

1. Dérivée de la fonction puissance $x^{n}$

Propriété : Soit n un entier relatif non nul. La fonction $x^{n}$ est dérivable :

* Sur R si $n>0$
* Sur $]-\infty ;0[$ et $]0;+\infty [$ si $n<0$

$$f'\left(x\right)=nx^{\left(n-1\right)}$$

Exemple : Dériver les fonction $x^{5}$ et $\frac{1}{x^{4}}$

Exercices 79 et 81 p. 123

1. Dérivée de la composée d’une fonction affine :

Propriété : On considère un intervalle I et $a$ et $b$ deux réels. Soit J l’intervalle formé des valeurs prises par $ax+b$ lorsque $x$ décrit l’intervalle I.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par
$f\left(x\right)=g\left(ax+b\right)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a :

$$f'\left(x\right)=a×g'\left(ax+b\right)$$

Capacité 9 p. 115

Exercices d’application : 77 et 78 p. 123

1. Fonction valeur absolue

Définition : la fonction valeur absolue est définie sur R par $f\left(x\right)=\left|x\right|$ et vaut :

* Si $x<0,$ $f\left(x\right)=-x$
* Si $x>0$ , $f\left(x\right)=x$

Exemple : $\left|2\right|=2$ et $\left|-3\right|=3$

Propriété : Soit f la fonction valeur absolue.

Pour tout $x$≠0, $f$ est dérivable. **Si** $x<0$ **, alors** $f'\left(x\right)=-1$**,
 si** $x>0$ **, alors** $f'\left(x\right)=1$**.**

La fonction valeur absolue n’est pas dérivable en 0.

Capacité 11 p 115

Exercices d’application : 73 p. 123

Expérimentation 15 p. 117

DM : Sujets A, B et C p. 133

**Tableau récapitulatif des dérivées**

