**Séquence 17**

**Fonctions trigonométriques**

I. Rappels

A. Définitions

Dans le plan muni d’un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel *x*, considérons le point N de la droite orientée d’abscisse *x*.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l’axe des abscisses et à l’axe des ordonnées passant par M.



Définitions :

- Le **cosinus** du nombre réel*x* est l’abscisse de M et on notecos*x*.

- Le **sinus** du nombre réel *x* est l’ordonnée de M et on note sin*x*.

Propriétés :

Pour tout nombre réel $x$, on a :

1) $-1\leq \cos(x)\leq 1$ 2) $-1\leq \sin(x)\leq 1$ 3) cos2 *x* + sin2 *x* = 1

4) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | $$\frac{π}{6}$$ | $$\frac{π}{4}$$ | $$\frac{π}{3}$$ | $$\frac{π}{2}$$ | π |
| $$\cos(x)$$ | 1 | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 0 | -1 |
| $$\sin(x)$$ | 0 | $$\frac{1}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | 1 | 0 |

II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

A. Périodicité

Propriétés :

1) $\cos(x)=\cos(\left(x+2kπ\right))$ où *k* entier relatif 2) $\sin(x)=\sin(\left(x+2kπ\right)) $où *k* entier relatif

Démonstration :

Aux points de la droite orientée d'abscisses *x* et $x+2kπ$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2π$.

Conséquence :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur $2π$ et de la compléter par translation.

Méthode : Résoudre une équation et une inéquation trigonométrique

**Capacité 3 et 4 p. 273**

B. Parité

Propriétés :

Pour tout nombre réel *x*, on a :

1) $\cos(\left(-x\right))=\cos(x)$

2) $\sin(\left(-x\right))=-\sin(x)$

Remarque :

On dit que la fonction cosinus est paire et que la

fonction sinus est impaire.

Rappels :

Une fonction *f* est **paire** lorsque pour tout réel *x* de son ensemble de définition *D*, *–x* appartient à *D* et $f\left(-x\right)=f(x)$.

Une fonction *f* est **impaire** lorsque pour tout réel *x* de son ensemble de définition *D*,

*–x* appartient à *D* et $f\left(-x\right)=-f(x)$.

Conséquences :

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Etudier la parité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\sin(x)-\sin(\left(2x\right))$ est impaire.

III. Dérivabilité et variations

A. Dérivabilité

Théorème :

 Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $R$ et on a :

$\left(cos(x)\right)' = –sin(x)$ et $\left(sin(x)\right)' = cos(x)$

Remarque : $\left(cos(x)\right)'$ se note également $cos^{'}\left(x\right)$

 B. Variations

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 $π$ |
| $$cos^{'}\left(x\right)=-\sin(x)$$ | 0 $-$ 0 |
| $$\cos(x)$$ | 1 -1  |

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 $\frac{π}{2}$ $π$ |
| $$sin^{'}\left(x\right)=\cos(x)$$ | 1 + 0 – –1 |
| $$\sin(x)$$ |  10 0 |

 C. Représentations graphiques



*Fonction cosinus*



*Fonction sinus*

Méthode : Etudier une fonction trigonométrique

**Capacité 1 et 2 p. 271**